وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
مجتمع آموزش عالی گناباد

انتقال حرارت ۱

مدرس: نفیسه بینش

فصل دوم:

معادلات اساسی هدایت

- ✓ مختصات کارتزین
- ✓ مختصات استوانه ای
- ✓ مختصات کروی

- طبق قانون فوریه، شدت انتقال حرارت در جسم به جنس آن، اندازه سطح و شیب دما در داخل جسم بستگی دارد:

$$q_x = -KA\frac{dT}{dx}$$ قانون فوریه

- معادله توزیع دما : رابطه ای برای **T** بر حسب **x**
- شیب دما در داخل جسم، **dT/dx**، از مشتق گیری معادله توزیع دما بدست می آید (مشتق **T** بر حسب **x**).
- در نتیجه برای محاسبه شدت انتقال حرارت در جسم، اولین گام یافتن معادله توزیع دما در آن جسم است.

- جسم مورد بررسی ممکن است یک سیستم یک، دو یا سه بعدی باشد و بسته به شکل هندسی آن معادلات مربوطه در مختصات کارتزین، استوانه ای یا کروی نوشته شود:

$$\mathbf{T\ (x,y,z)} \qquad \mathbf{T(r,\theta,z)} \qquad \mathbf{T(r,\theta,\varphi)}$$

- برای بدست آوردن توزیع دما، باید موازنه انرژی را برای یک جزء (المان) از جسم نوشت که در نهایت به یک معادله دیفرانسیل می رسیم.

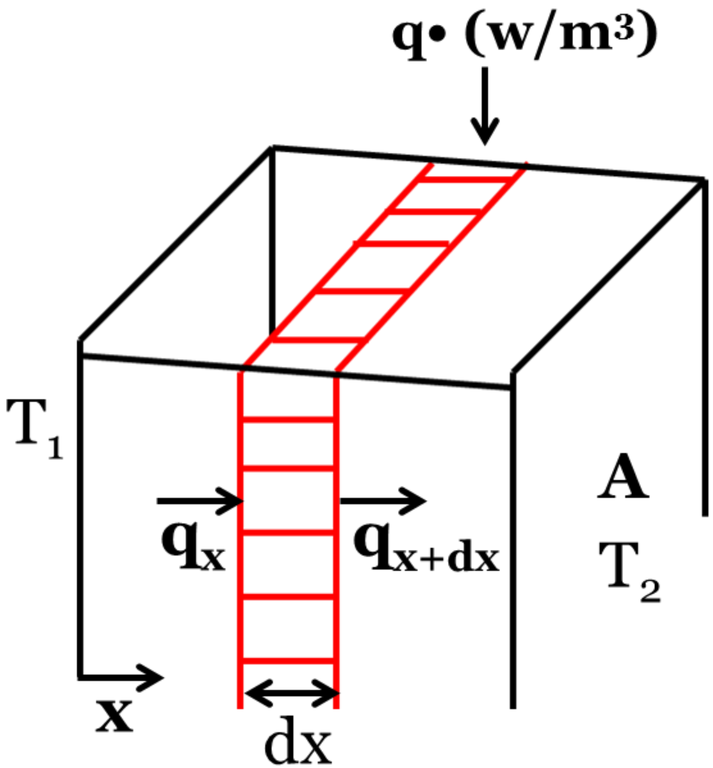
- در این فصل و فصل های بعدی، نحوه بدست آوردن معادله انرژی را برای چند سیستم بیان کرده و معادله دیفرانسیل و در نهایت معادله توزیع دما را بدست می آوریم.

۲-۱: معادله کلی هدایت در مختصات کارتزین (تیغه)

- شکل کلی موازنه انرژی به صورت زیر می باشد:

تغییرات انرژی داخلی (تغییر دما با زمان) =

حرارت مصرفی (چاه حرارتی)-حرارت تولیدی (چشمه حرارتی)+حرارت خروجی- حرارت ورودی



یا :

$$q_t = q_{in} - q_{out} + q_{gen}$$

- ترم q_t :

-تغییرات انرژی داخلی از ابتدای فرآیند انتقال حرارت تا انتها:

$$q_t = mc_p\Delta T$$

-تغییرات انرژی داخلی در هر لحظه:

$$q_t=mc_p \frac{dT}{dt}$$

$m=\rho V\longrightarrow$ المان : $dm=\rho(dV)=\rho A(dx)$

$$q_t=\rho c_p A(dx) \frac{dT}{dt}$$

- ترم q_{in} :

$$q_{in}=-KA \frac{dT}{dx} \Big|_x$$

$$q_{in}=-KA \frac{dT}{dx}$$

- ترم q_{out} :

$$q_{out} = -KA \frac{dT}{dx}\Big|_{x+dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y_{x+dx} - y|_x}{dx} \longrightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{\frac{dy}{dx}\big|_{x+dx} - \frac{dy}{dx}\big|_x}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dT}{dx}\right) = \frac{\frac{dT}{dx}\big|_{x+dx} - \frac{dT}{dx}\big|_x}{dx} \longrightarrow \frac{d^2T}{dx^2} = \frac{\frac{dT}{dx}\big|_{x+dx} - \frac{dT}{dx}}{dx}$$

$$\frac{dT}{dx}\Big|_{x+dx} = \frac{dT}{dx} + \frac{d^2T}{dx^2}\, dx$$

$$q_{out} = -KA\left(\frac{dT}{dx} + \frac{d^2T}{dx^2}\, dx\right)$$

- ترم q_{gen} :

$$q_{gen} = q^{\bullet}\, dv$$

$$q_{gen} = q^{\bullet}\, A\, dx$$

$$\left.\begin{aligned}
&q_t = \rho c_p A(dx)\,\frac{dT}{dt}\\
&q_{in} = -KA\,\frac{dT}{dx}\\
&q_{out} = -KA\left(\frac{dT}{dx} + \frac{d^2T}{dx^2}\right)dx\\
&q_{gen} = q^{\bullet}\, A\, dx
\end{aligned}\right\} \quad \mathbf{q_t = q_{in} - q_{out} + q_{gen}}$$

$$\rho c_p A(dx)\,\frac{dT}{dt} = -KA\,\frac{dT}{dx} + KA\left(\frac{dT}{dx} + \frac{d^2T}{dx^2}\,dx\right) + q^{\bullet}\,A\,dx$$

$$\rho c_p A(dx)\,\frac{dT}{dt} = \cancel{-KA\,\frac{dT}{dx}} + \cancel{KA\,\frac{dT}{dx}} + KA\,\frac{d^2T}{dx^2}\,dx + q^{\bullet}\,A\,dx$$

$$\rho c_p \cancel{A}(\cancel{dx})\,\frac{dT}{dt} = K\cancel{A}\,\frac{d^2T}{dx^2}\,\cancel{dx} + q^{\bullet}\,\cancel{A}\,\cancel{dx}$$

$$\rho c_p\frac{dT}{dt} = K\,\frac{d^2T}{dx^2} + q^{\bullet}$$

طرفین را تقسیم بر K می کنیم:

$$\frac{\rho c_p}{K}\frac{dT}{dt} = \frac{d^2T}{dx^2} + \frac{q^{\bullet}}{K}$$

با تعریف ضریب نفوذ حرارتی به صورت $\alpha = K/\rho c_p$ داریم:

$$\frac{1}{\alpha}\frac{dT}{dt} = \frac{d^2T}{dx^2} + \frac{q^{\bullet}}{K}$$

- معادله کلی هدایت در سیستم یک بعدی:

$$\frac{1}{\alpha}\frac{dT}{dt} = \frac{d^2T}{dx^2} + \frac{q^\bullet}{K}$$

- معادله کلی هدایت در سیستم سه بعدی

$$\frac{1}{\alpha}\frac{dT}{dt} = \frac{d^2T}{dx^2} + \frac{d^2T}{dy^2} + \frac{d^2T}{dz^2} + \frac{q^\bullet}{K}$$

- حالت پایدار: تغییرات با زمان وجود ندارد؛ در نتیجه ترم **dT/dt** حذف می شود:

- معادله هدایت سه بعدی پایدار با چشمه حرارتی:

$$\frac{d^2T}{dx^2} + \frac{d^2T}{dy^2} + \frac{d^2T}{dz^2} + \frac{\dot{q}}{K} = 0$$

- معادله هدایت سه بعدی ناپایدار بدون چشمه حرارتی:

$$\frac{1}{\alpha}\frac{dT}{dt} = \frac{d^2T}{dx^2} + \frac{d^2T}{dy^2} + \frac{d^2T}{dz^2}$$

- معادله هدایت سه بعدی پایدار بدون چشمه حرارتی

$$\frac{d^2T}{dx^2} + \frac{d^2T}{dy^2} + \frac{d^2T}{dz^2} = 0$$

- مثال: با توجه به معادله کلی هدایت در تیغه، رابطه ای برای شدت حرارت هدایتی در حالت پایا و بدون چشمه حرارتی در حالت یک بعدی در داخل یک تیغه به ضخامت L بدست آورید.

$$\frac{1}{\alpha}\cancel{\frac{dT}{dt}} = \frac{d^2T}{dx^2} + \cancel{\frac{d^2T}{dy^2}} + \cancel{\frac{d^2T}{dz^2}} + \cancel{\frac{\dot{q}}{K}}$$

$$\frac{d^2T}{dx^2} = 0 \ \rightarrow \frac{dT}{dx} = C_1$$

$$T = C_1x + C_2$$

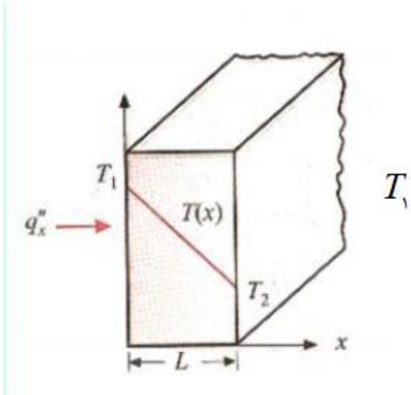
با توجه به اینکه دو ثابت داریم، پس نیاز به دو شرط مرزی برای محاسبه این ثوابت داریم.

• شرایط مرزی :

$$\left.\begin{array}{l} X=o \rightarrow T=T_1 \\ X=L \rightarrow T=T_2 \end{array}\right\} \quad T = C_1 x + C_2$$

$$\left.\begin{array}{l} T_1=C_1(0) + C_2 \rightarrow C_2=T_1 \\ T_2=C_1(L) + T_1 \rightarrow C_1=\frac{T_2-T_1}{L} \end{array}\right\} \quad T=\frac{T_2 - T_1}{L}x + T_1$$

معادله توزیع دما



فرض $T_1 > T_2$

قانون فوریه

$$q = -KA\,\frac{dT}{dx}$$

$$T = \frac{T_2 - T_1}{L}x + T_1 \;\rightarrow\; \frac{dT}{dx} = \frac{T_2 - T_1}{L}$$

$$q = -KA\frac{T_2 - T_1}{L} = \mathrm{KA}\frac{T_1 - T_2}{L}$$

ساده ترین شکل قانون فوریه که در جلسه قبل اشاره شد (هدایت یک بعدی، پایا، بدون چشمه حرارتی)